ＭＡ　Hoermander　多変数複素解析を読む　講義報告[1]

２００８年5月１７日（土）　１４：００−１６：００

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上で定義された一回連続微分可能な複素数値関数が、**解析的あるいは正則**であることの定義をし、解析関数全体の集合が可換環（可換代数）になることを示した。次に、解析関数の解析写像による引き戻しが解析的になることを示した。

1　複素多変数関数の基本的性質

1.1　準備

$\mathbb{C}^n (\cong \mathbb{R}^n)$ の複素座標と複素共役を

$$z_j = x_{2j-1} + \sqrt{-1}x_{2j},\ \overline{z}_j = x_{2j-1} - \sqrt{-1}x_{2j} \quad (1 \leq j \leq n)$$

と表示することにする。$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とし、$u \in C^1(\Omega)$ とする。u の微分 du は

$$du = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$$

と表すことができる。ただし、

$$\frac{\partial u}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_{2j-1}} - \sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial z_{2j}}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_{2j-1}} + \sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial z_{2j}}\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

いま、

$$\partial u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j, \quad \overline{\partial} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$$

とおけば、

$$du = \partial u + \overline{\partial} u$$

微分形式 $\partial u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j$ は、**(1,0) 型**、微分形式 $\overline{\partial} u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$ は、**(0,1) 型**と呼ばれる。

定義 1.1 (解析的（正則）関数). 関数 $u \in C^1(\Omega)$ は、du が $(1,0)$ 型のとき、すなわち、$\overline{\partial} u = 0$（コーシー・リーマンの方程式）をみたすとき、$\Omega$ において**解析的（あるいは正則）**であるという。Ω における解析関数全体の集合を $\mathcal{A}(\Omega)$ と書く。

練習問題 1.1.

1. $\partial : C^1(\Omega) \to C(\Omega)_{(1,0)},\ \overline{\partial} : C^1(\Omega) \to C(\Omega)_{(0,1)}$ は線形で、関数の積に対する微分の公式を満たすことを示せ。

2. $\mathcal{A}(\Omega) \subset C^1(\Omega)$ は可換代数をなすことを示せ。

[1] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

定義 1.2 (解析写像). 開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ から $\mathbb{C}^n$ への写像 u が、**解析写像**であるとは、$u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)$ とおいたとき、各 $j(1 \leq j \leq m)$ に対して、$u_j \in \mathcal{A}(\Omega)$ が成り立つことである。

練習問題 1.2. u を開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ から $\mathbb{C}^n$ への解析写像とする。開集合 $D \subset \mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}$ への任意の連続関数 v の u による引き戻しを、

$$u^*(v) = v \circ u$$

により定義する。ただし、$u(\Omega) \subset D$ とする。このとき、$u^* : C(D) \to C(\Omega)$ は環準同型になることを示せ。すなわち、

1. $u^*(\lambda v + \mu w) = \lambda u^*(v) + \mu u^*(w) \quad \mathit{for}\ \forall u, w \in C(D),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

2. u^* により定値写像は定値写像に写される。

3. $u^*(vw)(z) = (u^*(v)u^*(w))(z) \quad \mathit{for}\ \forall z \in \Omega$

定理 1.1. u を開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ から $\mathbb{C}^n$ への解析写像とする。開集合 $D \subset \mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}$ への任意の連続関数 v が解析的であるとき、v の u による引き戻し $u^*(v) : \Omega \to \mathbb{C}$ は解析的である。

記録 by J.S